

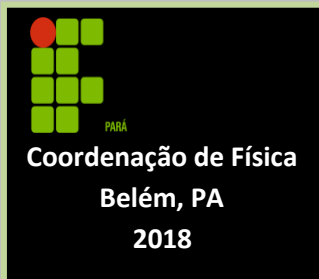
IFPA - Campus Belém Publicações (belem.ifpa.edu.br)

# *Sobre a relatividade especial em face do comportamento dual das partículas*

(Terceira Parte - Equação Geral da Partícula\*)

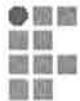
**Versão em português do 3º artigo da tese de  
Professor Titular em Física apresentado pelo  
Dr. Benedito Tadeu Ferreira de Moraes ao  
Instituto Federal de Educação,  
Ciência e Tecnologia do Pará**

**Prof. Dr. Titular Benedito Tadeu Ferreira de Moraes**





Serviço Público Federal



**INSTITUTO  
FEDERAL**  
Pará

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PARÁ**  
**SISTEMA INTEGRADO DE PATRIMÔNIO, ADMINISTRAÇÃO E CONTRATOS**



# PROCESSO

## 23051.011754/2018-22

Cadastrado em 25/04/2018



Processo disponível para recebimento com  
código de barras/QR Code

**Nome(s) do Interessado(s):**

BENEDITO TADEU FERREIRA DE MORAES

**E-mail:**

tadeu.moraes@ifpa.edu.br

**Identificador:**

327534

**Tipo do Processo:**

SOLICITAÇÃO

**Assunto Detalhado:**

VERSÃO EM PORTUGUÊS DO 3º ARTIGO

**Unidade de Origem:**

BELÉM/SEÇÃO DE DOCUMENTAÇÃO E ARQUIVO (11.02.03.06)

**Criado Por:**

BEATRIZ BARATA RIBEIRO

**Observação:**

A COORD. DE FÍSICA ENCAMINHA VERSÃO EM PORTUGUÊS DO 3º ARTIGO REFERENTE A TESE DO PROFESSOR TITULAR.

### MOVIMENTAÇÕES ASSOCIADAS

Data	Destino	Data	Destino
25/04/2018	FÍSICA, LICENCIATURA (11.02.02.16)		

Belém, 25 de abril de 2018

Do: Prof. Dr. Titular Benedito Tadeu Ferreira de Moraes

Para: Prof. Dr. Titular Daniel Palheta Pereira  
Coordenação de Física – IFPA Campus Belém

Ilmo. Coordenador,

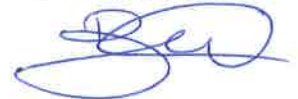
Encaminhamos a V.Sa a **versão em português do 3º artigo (Anexo)** referente à minha tese de Professor Titular. Trata-se da terceira parte do programa de pesquisa "*sobre a relatividade especial em face do comportamento dual das partículas*". Nesse artigo é apresentada a equação geral de uma partícula\* que concentra matéria e radiação, cuja aplicação leva a resultados semelhantes às equações de onda de alguns clássicos da literatura. Na oportunidade solicitamos que, após recebimento, o artigo seja enviado à biblioteca central para arquivo e catalogação, a fim de que seja incorporado como parte integrante do acervo da instituição.

Atenciosamente,



Benedito Tadeu Ferreira de Moraes  
Prof. Dr. Titular em Física- IFPA Campus Belém

PROTOCOLO - IFPA/Campus Belém  
Seção de Documentação e Arquivo  
Em: 25/04/2018  
Hora: 09:05



**ATA DE APRESENTAÇÃO DE SEMINÁRIO DO PROF. DR. TITULAR DE FÍSICA DO IFPA BENEDITO TADEU FERREIRA DE MORAES**

Aos seis dias do mês de março do ano de dois mil e dezoito, às quinze horas, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA)-Campus Belém, no auditório da Biblioteca Central, reuniram-se os professores: João Bosco Soares Pampolha Jr (Doutor-Física), Charles da Rocha Silva (Doutor-Física), Roberto Paulo Barbosa Ramos (Doutor-Engenharia de Materiais), Marcelo de Souza Ribeiro (Doutor-Física) e Raimundo Otoni Melo Figueiredo (Doutor-Matemática), também presentes estudantes do IFPA, para assistirem a apresentação do seminário do Prof. Dr. Titular BENEDITO TADEU FERREIRA DE MORAES, intitulado “*Sobre a relatividade especial em face do comportamento dual das partículas. (Terceira parte: Equação Geral da Partícula\*)*”. Oportunidade que foi analisado o pretense artigo (anexo), de mesmo título, pelos docentes supracitados ficando definida formalmente a indicação do trabalho para submissão em revista estrangeira especializada. Dessa forma, realizada a apresentação, a ata segue assinada pelos professores presentes.



**Benedito Tadeu F. de Moraes**



**Roberto Paulo Barbosa Ramos**



**João Bosco Soares P. Jr**



**Charles da Rocha Silva**



**Marcelo de Souza Ribeiro**



**Raimundo Otoni M. Figueiredo**

***Sobre a relatividade especial em face  
do comportamento dual das partículas***  
**(Terceira Parte – Equação Geral da Partícula\*)**

**Prof. Dr. Titular Benedito Tadeu Ferreira de Moraes**

IFPA  
Coordenação de Física  
Belém-Pará-Brasil  
Abril-2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

Moraes, Benedito Tadeu Ferreira de. Sobre a relatividade especial em face do comportamento dual das partículas (terceira parte: equação geral da partícula\*)/ Benedito Tadeu Ferreira de Moraes. — Belém: IFPA, 2018.  
17 f.

Originalmente apresentado como 3º Artigo Científico referente à tese de Professor Titular .

1. Equação Geral.
  2. Partícula\*.
  3. Energia.
  4. Momentum
  5. Complementaridade.
1. Título
-

## **Sobre a relatividade especial em face do comportamento dual das partículas (Terceira parte: Equação Geral da Partícula\*)**

Benedito Tadeu Ferreira de Moraes

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, Belém, Pará (PA), Brazil*

### **Resumo**

Neste trabalho apresentamos a equação geral do movimento de uma partícula\* que concentra matéria e radiação, e as propriedades destas fornecem seu duplo comportamento como corpúsculo ou onda. Em determinada interação, ela apresenta velocidade de um corpúsculo,  $v_c$  (ou de uma onda de matéria,  $v_w$ ). Em outro tipo de interação ela apresenta a velocidade de uma onda de radiação,  $c$  (ou do corpúsculo da radiação). No primeiro caso a radiação está “oculta” na matéria; no segundo, a matéria está “oculta” na radiação. Em ambos os casos a equação geral recai nas equações da relatividade especial para qualquer partícula\*. Por outro lado, recai em uma equação de onda quando são usados os operadores momentum e energia para determinado sistema físico. Este notável resultado teórico fornece fortes requisitos a favor da adoção desse novo conceito de partícula\*, e, ao mesmo tempo, enseja novas argumentações no sentido de fixar a completeza do princípio da complementaridade.

**Palavras-chave:** Equação geral, partícula\*, energia, momentum, complementaridade.

## **On special relativity in face of the dual behavior of particles (Third part: General Particle\* Equation)**

Benedito Tadeu Ferreira de Moraes

*Federal Institute of Education, Science and Technology of Pará, Belém, Pará (PA), Brazil*

### **Abstract**

In this work we present the general equation of the motion of a particle\* that concentrates matter and radiation, and the properties of these provide their double behavior as corpuscle or wave. In a given interaction, it presents velocity of a corpuscle,  $v_c$  (or a wave of matter,  $v_w$ ). In another type of interaction it presents the velocity of a radiation wave,  $c$  (or the corpuscle of radiation). In the first case the radiation is “hidden” in matter; in the second, matter is “hidden” in radiation. In both cases the general equation falls into the special relativity equations for any particle\*. On the other hand, it falls into a wave equation when the momentum and energy operators are used for a given physical system. This remarkable theoretical result provides strong requirements in favor of the adoption of this new concept of particle, and at the same time it gives rise to new arguments in order to fix the completeness of the principle of complementarity.

**Keywords:** General equation, particle\*, energy, momentum, complementarity

## 1. Introdução

Na Física, a palavra unificação (ou poderia ser generalização) aparece em duas grandes obras apresentadas, respectivamente, no século XVII e século XIX: a mecânica de Newton e o eletromagnetismo de Maxwell. Juntas elas formam o contexto clássico dessa ciência e aliadas à termodinâmica completam uma estrutura científica que permitiu as grandes revoluções da sua época, cujos resultados atravessaram o século XX, e até hoje usufruímos deles.

É certo que tudo parecia sob o controle da Física Clássica, contudo, embora essas obras parecessem intocáveis, havia um descompasso entre elas: o desenvolvimento da teoria eletromagnética exigia uma necessária reflexão dos fundamentos mecanicistas sobre a concepção de ação instantânea à distância e conseqüentemente do espaço e tempo absolutos. Em outras palavras, a adequação da mecânica ao eletromagnetismo exigia uma necessária revisão dos conceitos de espaço e tempo.

A crise posta pelo eletromagnetismo, que havia fornecido os meios científicos para estabelecê-la, foi recrudescida por Mach [1] com suas contundentes críticas epistemológicas sobre a mecânica clássica, colocando em evidência as fragilidades do edifício newtoniano ao fornecer os fundamentos filosóficos para a grande ruptura conceitual, que foi consumada em 1905, com a teoria da relatividade especial-TRE [2].

Um segundo ponto crítico da Física Clássica estava nas fórmulas de Wien [3] e Rayleigh [4], obtidas teoricamente para explicar a curva experimental da distribuição espectral de emissão da radiação por um corpo negro, em forma de sino, que é função da temperatura do corpo e do comprimento de onda da radiação. Ambos recorreram à mecânica estatística e houve um relativo avanço, pois suas equações notadamente desenham pontos de aproximação de um lado e de outro da curva experimental, porém estão longe de representá-la na forma de sino.

Planck [5] também utilizou a mecânica estatística e usando o formalismo de Boltzmann [6], mas, sobretudo, adotando a hipótese na qual a energia varia de forma discreta, com o mínimo valor de um “quantum” de energia ( $E = h\nu$ , onde  $h$  é uma constante e  $\nu$ , a frequência da radiação), ele obtém a fórmula correta que iria romper a contradição entre a teoria e os valores experimentais. Esse advento inaugura a mecânica quântica, estabelece um paradigma, e promove uma revolução que viria revelar-se decisiva em toda a construção teórica e experimental da Física do século XX.

O paradigma se baseava na proposição da energia em quantidades discretas, que efetivamente rompia com a crença da Física Clássica na qual a energia da radiação se apresentava sempre como uma grandeza contínua na emissão. Essa era a crença de Wien, Rayleigh, Planck e de todos os físicos da época. Foi necessária coragem para Planck vencer muitos, mas principalmente suas próprias convicções [7].

Os novos conceitos de energia, espaço, tempo deram o impulso necessário para que uma nova Física, alicerçada na mecânica quântica e na relatividade especial, eclodisse. Mas, não tardou para que outras concepções fossem postas à prova.

Com a Física Clássica aprendemos que uma onda é caracterizada por possuir comprimento e uma partícula por possuir massa, e que essas características são incompatíveis, principalmente ao que concerne à localização. A partícula é localizável e pode ser desviada em um processo de colisão. A onda, por outro lado, tem grande



capacidade de dispersão e não sofre nenhum desvio ao cruzar-se com outra, no máximo ocorre interferência.

Mas as pesquisas com radiação de alta energia foram fundamentais para por em causa a natureza da radiação eletromagnética, pois a muito se sabia que a interferência, a polarização, a refração e a difração são fenômenos que requerem um modelo ondulatório para sua descrição. Contudo, o efeito fotoelétrico [8] e o efeito Compton [9], que surgem na interação de radiação de elevada energia com a matéria, só podem ser explicados através de um modelo corpuscular da radiação.

Do mesmo modo aprendemos que na experiência de Thomson [10] o comportamento dos elétrons deve ser descrito em termos de um modelo corpuscular, e que na experiência de Davisson e Germer [11], os elétrons são descritos em termos de um modelo ondulatório. Então, elétrons e fótons têm propriedades semelhantes em face de alguma interação de prevalência corpuscular ou ondulatória, embora sejam partículas distintas, cada uma em sua classe: elétrons são férmions e fótons são bósons.

Em 1923, De Broglie [12] propõe uma nova generalização na Física ao estabelecer a hipótese na qual todas as partículas têm duplo comportamento relativo às suas propriedades corpusculares e ondulatórias.

No que pese tais propriedades, há quantidades físicas comuns a ambos os conceitos e isto resta claro em De Broglie quando estabeleceu que a energia e o momentum constituem o elo principal entre duas representações distintas da mesma realidade – a partícula – cujo momentum ( $p$ ) se relaciona com o comprimento da onda ( $\lambda$ ), da mesma forma que sua energia ( $E$ ) se relaciona com a frequência da onda ( $\nu$ ), por intermédio da constante de Planck,  $h$ .

Mas, o ponto crucial da hipótese de De Broglie estava no enfrentamento da questão de que a velocidade de sua onda de matéria era maior que a velocidade da luz no vácuo, em confronto direto com a relatividade especial, teoria sob a qual sua hipótese havia sido edificada.

De Broglie não considerou uma possível modificação ou extensão da relatividade especial que pudesse se ajustar ao duplo comportamento, que ele próprio havia identificado. Ao invés, propôs associar não uma única onda à partícula, mas um grupo de ondas superpostas, umas as outras, de modo a haver interferência destrutiva praticamente em todo o espaço, com exceção no entorno da partícula. De fato foi uma saída, mas o preço a pagar, todos sabemos: o indeterminismo, a ausência de clareza e precisão sobre medidas realizadas em objetos quânticos.

O que é recorrente e aceito, hoje, e o que efetivamente aprendemos em mecânica quântica sobre este assunto, é que os dois modelos são necessários para descrição “completa” do movimento de uma partícula, do elétron, por exemplo, e que a raiz desse desenvolvimento está na hipótese de De Broglie, que não sugeriu nenhum conceito novo de partícula (para ele o elétron era tão somente o corpúsculo com uma onda associada), mas também não explicou como a natureza excludente e incompatível desses conceitos se vinculava a ela, e também não forneceu pistas sobre o que ondulava nem qual deveria ser a equação de seu movimento.

De todo modo, sua hipótese proporcionaria, em 1926, um novo e importante desenvolvimento da mecânica quântica – a mecânica ondulatória – na qual Schrödinger [13] tem papel fundamental. Ele escreveu uma equação de onda como uma equação de autovalores para explicar, entre outras aplicações, a quantização do átomo proposta por

De Broglie na qual o elétron descreve uma órbita circular em torno do núcleo e está em fase com a onda, e é isso que faz intervir os números inteiros no átomo. Para Schrödinger, os números inteiros intervêm na mecânica ondulatória da mesma forma natural com que os nodos intervêm na teoria das cordas vibrantes [14].

Dessa forma a equação para as chamadas ondas de De Broglie deveria ser uma equação diferencial, no tempo e no espaço, que incorpora uma função de onda, que chamou ondas de campo  $\Psi$ , que se somam, interferem e criam nodos.

A aceitação da equação de Schrödinger foi imediata pela simplicidade da descrição ondulatória que apresentava, contudo era não relativística, mas incorporava-se às duas outras versões da teoria quântica: a mecânica matricial de Heisenberg [15] e a álgebra quântica de Dirac [16]. Depois Schrödinger demonstrou que as três versões eram equivalentes [17], mas nenhum deles (assim como De Broglie) aventou na formulação de sua teoria quântica algo interno à partícula que fornecesse seu duplo comportamento.

Em 2017, Moraes apresentou dois artigos ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará-IFPA relativos ao programa “*sobre a relatividade especial em face da dualidade das partículas*” que tratam efetivamente desse assunto.

Os artigos reúnem uma análise relativista, cinemática [18] e dinâmica [19], do movimento do elétron e do fóton, ambos considerados como partículas\* que “ocultam” um ao outro e por isso apresentam duplo comportamento, que é revelado como um corpúsculo ou como uma onda em face de alguma interação determinante.

No presente trabalho visitamos esses artigos com a concepção de que a energia e o momentum constituem de fato o elo principal entre as duas representações distintas da mesma realidade – a partícula\*. De um lado, energia e momentum fornecendo as equações que expressam a dinâmica relativística do movimento do corpúsculo e, em outra via, como operadores, fornecendo as equações que expressam o movimento da onda [20].

Nesse caminho, usando a ferramenta de vetores e escalares, mostraremos que os resultados da relatividade especial e a equação de onda da partícula\*, para determinado sistema físico, podem ser sintetizados e compreendidos a partir de uma única formulação física e matemática mais geral e que isso nos remete a novas argumentações epistemológicas sobre o princípio da complementaridade de Bohr.

## 2. Equação geral

Nos artigos publicados em 2017 [18, 19], Moraes mostrou que elétrons e fótons são uma matéria dual-MD, uma partícula\* de matéria e radiação que possui velocidade  $v_D$ ; o índice “D” refere-se ao seu duplo comportamento: como corpúsculo, de massa  $m_D$ , ou como onda, de frequência  $\nu_D$ , em que ambos obedecem à relação de De Broglie:  $v_c v_w = c^2$ , onde  $v_c$  é a velocidade do corpúsculo e  $v_w$ , a velocidade da onda.

Seguindo de perto seus resultados podemos inferir que qualquer partícula\* com essas propriedades possui massa  $M_D = m_D \gamma_D$ , que pode ser expressa na forma complexa:

$$M_D = m_m^{(D)} + i m_r^{(D)} \quad (7)$$

onde  $m_m$  é a massa inercial da matéria e  $m_r$ , a massa inercial da radiação, representadas respectivamente por:

$$m_m^{(D)} = m_D \gamma \left(1 - \frac{v_D^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (8)$$

e

$$m_r^{(D)} = m_D \left[1 - \gamma^2 \left(1 - \frac{v_D^2}{c^2}\right)\right]^{1/2}, \quad (9)$$

onde  $m_D$  e  $v_D$  são definidas para o tipo de partícula\* e  $\gamma = (1 - v_c^2/c^2)^{-1/2}$ , é um fator de velocidades, análogo ao fator de Lorentz [21].

Em assunção à relatividade, sua energia tem a forma  $E_D = M_D c^2$ , porém devido aos termos da massa  $M_D$  ela também contém duas parcelas, ou seja:

$$E_D = E_m^{(D)} + iE_r^{(D)}, \quad (10)$$

onde  $E_m^{(D)} = m_m^{(D)} c^2$  consiste na energia da matéria

$$E_m^{(D)} = m_D c^2 \gamma \left(1 - \frac{v_D^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (11)$$

e,  $E_r^{(D)} = m_r^{(D)} c^2$ , na energia da radiação

$$E_r^{(D)} = m_D c^2 \left[1 - \gamma^2 \left(1 - \frac{v_D^2}{c^2}\right)\right]^{1/2}. \quad (12)$$

Naturalmente o momentum dado por  $P_D = M_D v_D$ , também se apresenta com as parcelas relativas à matéria e à radiação,

$$P_D = p_m^{(D)} + ip_r^{(D)}, \quad (13)$$

uma vez que a substituição da expressão da massa  $M_D$  fornece:

$$p_m^{(D)} = m_m^{(D)} v_D = m_D v_D \gamma \left(1 - \frac{v_D^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (14)$$

e

$$p_r^{(D)} = m_r^{(D)} v_D = m_D v_D \left[1 - \gamma^2 \left(1 - \frac{v_D^2}{c^2}\right)\right]^{1/2}. \quad (15)$$

Finalmente, quando combinamos as expressões do momentum e da energia definidos anteriormente, resulta:

$$P_D^2 = \frac{E_m^{(D)2}}{v_w^2} + \frac{E_r^{(D)2}}{c^2}, \quad (16)$$

onde  $E_m^{(D)}$ ,  $E_r^{(D)}$  e  $P_D$  são fornecidos pelas equações (11), (12) e (13), respectivamente;  $v_w = \lambda v$ , é a velocidade da onda associada à matéria e  $c = \lambda_r v_r$ , é a velocidade da onda associada à radiação, que guardam entre si a relação:  $v_c v_w = c^2$ .

Essa equação é geral e revela toda a informação a despeito da partícula\* e seus respectivos efeitos relativos ao duplo comportamento. Como veremos, ela parece fornecer um padrão a partir do qual outras equações são obtidas.

## 2.1. Dinâmica da partícula\*

Notadamente quando  $v_D = v_c$ , no padrão (16), a análise recai sobre a matéria, reproduzindo todos os resultados da dinâmica relativística para uma partícula\* de massa:  $M_D = m_m^{(D)}$ ; energia igual a:  $E_m^{(D)} = m_m^{(D)} c^2$  e momentum:  $p_m^{(D)} = m_m^{(D)} v_c$ . Nestas circunstâncias a radiação está “oculta” na matéria e isso proporciona seu duplo comportamento, ou seja, estar “oculta” na outra fornece a razão de ambas coexistirem em uma mesma realidade, de modo que a partícula\* de matéria se apresentará como um corpúsculo, de massa inercial  $m_D = m_m$ , em uma interação de prevalência corpuscular; mas se apresentará como onda, de frequência  $\nu_D = \nu_m$ , em uma interação de prevalência ondulatória.

Por outro lado, quando  $v_D = c$ , o padrão (16) recai na radiação com massa inercial:  $M_D = m_r^{(D)}$ , energia:  $E_r^{(D)} = m_r^{(D)} c^2$  e momentum:  $p_r^{(D)} = m_r^{(D)} c$ . Nesse caso é a matéria que está “oculta”, proporcionando à radiação um duplo comportamento que, em determinadas interações se revela como corpúsculo, de massa inercial  $m_D = m_r$ , e em outras interações se revela como onda, de frequência  $\nu_D = \nu_r$ .

Assim se compreende porque os efeitos da matéria são observados na radiação e porque os efeitos da radiação são observados na matéria, em face de alguma interação.

No artigo “*sobre a relatividade especial em face do comportamento dual das partículas (segunda parte: energia e momentum)*” [19], Moraes mostrou como se transformam as equações da partícula\* para o elétron e para o fóton, considerando ambos como seus constituintes.

## 2.2. Equação de onda da partícula\*

Para obter sua famosa equação, Schrödinger [13] substituiu na hamiltoneana do sistema em análise a energia e o momentum da partícula pelos operadores:

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (17)$$

e

$$p = -i\hbar \nabla \quad , \quad (18)$$

onde

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (19)$$

é o operador diferencial nabla, com  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  sendo os vetores unitários nas direções dos eixos cartesianos.

Em particular consideramos não haver nenhum óbice quanto à adoção desses operadores em todos os ramos da Física: clássica, quântica ou relativista.

Primeiro, porque  $i = \sqrt{-1}$  é um número e a constante  $\hbar = h/2\pi$  ( $h$ , é a constante de Planck), também é um número, embora tenha significado: ela representa a falta de simultaneidade nos processos de medidas dos sistemas microfísicos, mas não é uma

exclusividade desses sistemas. Grosso modo, ela não afeta resultados de medidas em sistemas macroscópicos.

Segundo, porque os operadores  $\partial/\partial t$  e  $\nabla$  atuam em funções contínuas e a evolução espaço-temporal de ondas é descrita por intermédio de variáveis contínuas. Portanto podemos usar novamente o padrão (16) para obter a equação de onda associada.

Por um lado, ele se reduz a uma equação de partícula\* de matéria quando  $v_D = v_c$ , ou seja,

$$p_m^{(D)2} = \frac{E_m^{(D)2}}{v_w^2} . \quad (20)$$

Dessa forma, quando o momentum  $p_m^{(D)}$  e a energia  $E_m^{(D)}$  são substituídos pelos operadores  $[E_m^{(D)}] = i\hbar\partial/\partial t$  e  $[p_m^{(D)}] = -i\hbar\nabla$ , e estes aplicados a um determinado campo de ondas de matéria  $\psi_m(x, y, z; t)$ , o resultado é uma equação de onda associada a este tipo de partícula\*, relativamente a este campo.

Por outro lado, o mesmo padrão (16) é reduzido a uma equação de partícula\* de radiação, ou seja, quando  $v_D = c$ , então

$$p_r^{(D)2} = \frac{E_r^{(D)2}}{c^2} . \quad (21)$$

A similaridade com o caso anterior se verifica quando substituimos o momentum  $p_r^{(D)}$  e a energia  $E_r^{(D)}$  pelos operadores  $[p_r^{(D)}] = -i\hbar\nabla$  e  $[E_r^{(D)}] = i\hbar\partial/\partial t$ . Neste caso, a aplicação desses operadores sobre um determinado campo de radiação  $\psi_r(x, y, z; t)$  fornecerá a equação de onda associada a este outro tipo de partícula\*, relativamente a este campo.

### 3. Aplicações

O objeto desse estudo não é mostrar a estrutura formal do desenvolvimento das áreas da física onde foram apresentadas as equações de onda para descrever os fenômenos físicos na quais elas são aplicáveis. O interesse reserva-se na obtenção de equações de onda de partículas\* que obedecem às condições impostas pelo modelo apresentado, quais sejam:

- (1) que partículas\* de matéria obedecem à condição  $v_D = v_c$  e também a relação  $v_c v_w = c^2$ , impondo ainda que as equações de onda dessas mesmas partículas\* são originadas pela aplicação dos operadores energia e momentum em campos escalares no limite não-relativístico ou em campos de componentes de vetores ou matrizes no limite relativístico;
- (2) que partículas\* de radiação obedecem à condição  $v_D = c$  e a relação  $v_c v_w = c^2$ , onde  $v_w = c$  [18], considerando que as equações de onda dessas partículas\* resultam da aplicação dos operadores energia e momentum em campos vetoriais, excepcionalmente em campos escalares quando o repouso é tratado relativisticamente [19].

Então, podemos adequar os sistemas de interesse para escrever a equação de onda e a partir daí depreender do que efetivamente estamos tratando.

### 3.1. Vibrações em um meio material

Quando usamos o padrão (20), com os operadores  $[p_m^{(D)}] = -i\hbar\nabla$  e  $[E_m^{(D)}] = i\hbar\partial/\partial t$  aplicados ao campo de ondas de matéria  $\psi_m(x, y, z; t)$ , resulta a equação:

$$\nabla^2\psi_m(x, y, z; t) = \frac{1}{v_w^2} \frac{\partial^2\psi_m(x, y, z; t)}{\partial t^2}, \quad (22)$$

Essa expressão é semelhante à equação de D'Alembert das cordas vibrantes [22], que pode ser deduzida do padrão (20) considerando que uma corda de comprimento  $L$  e densidade linear de massa constante,  $\sigma$ , em toda sua extensão, vibra entre dois pontos fixos, produzindo uma tensão  $T$ , na corda, e um campo de ondas de matéria (ou função de onda que caracteriza a oscilação)  $\psi_m(x, y, z; t)$ , que tem velocidade  $v_w = \sqrt{T/\sigma}$ .

### 3.2. Vibrações no vácuo

No formalismo apresentado neste trabalho, a equação da onda relativa às oscilações do campo de radiação  $\psi_r(x, y, z; t)$  que esconde a matéria, pode ser obtida por intermédio do padrão (21), quando os operadores  $[p_r^{(D)}] = -i\hbar\nabla$  e  $[E_r^{(D)}] = i\hbar\partial/\partial t$  atuam sobre  $\psi_r(x, y, z; t)$ . Tal operação fornece:

$$\nabla^2\psi_r(x, y, z; t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi_r(x, y, z; t)}{\partial t^2}, \quad (23)$$

Essa expressão é semelhante à equação de onda de Maxwell [23] que demonstrou ser a luz uma onda eletromagnética que se desloca com velocidade  $v = \sqrt{1/\mu\varepsilon}$ , onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética e  $\varepsilon$ , a permissividade elétrica, ambas se referem a um meio. No vácuo,  $\mu = \mu_0$  e  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , tal que  $c = \sqrt{1/\mu_0\varepsilon_0} \cong 3 \cdot 10^8$  m/seg.

Esse resultado marca apogeu de sua teoria. Primeiro, porque juntou a eletricidade ao magnetismo fornecendo uma teoria eletrodinâmica do campo eletromagnético  $\psi_r(x, y, z; t)$ , onde todos os fenômenos elétricos e/ou magnéticos seriam regidos por quatro leis locais (equações de Maxwell).

Segundo, porque ao juntar essa teoria com a óptica permitiu a elaboração da teoria eletromagnética da luz, onde a equação da onda é proveniente das oscilações do próprio campo  $\psi_r(x, y, z; t)$ . Assim, sua teoria demonstrara formalmente tratar-se a luz de uma onda, e não de um corpúsculo.

É oportuno registrar que as equações de D'Alembert e Maxwell são aplicadas a sistemas macroscópicos, onde o campo representa uma alta densidade de população de partículas\*, todavia como já foi ressaltado no início desta Seção não há restrições quanto ao formalismo dual ser utilizado a qualquer sistema que envolve matéria ou radiação, mesmo para uma única partícula\*, como veremos nas próximas aplicações.

### 3.3. Equação de onda da partícula\* de matéria no regime não-relativista

Uma partícula\* de matéria pode apresentar-se como um corpúsculo ou como onda. Então considere a partícula\* livre no espaço, com massa  $m_m^{(D)} = \gamma m_o$ , "oculta" no

campo de ondas  $\psi_m(x, y, z; t)$  da própria partícula\* [18, 19]. Nesse caso ela estará representada por uma onda cuja equação é fornecida pelo padrão (20) na seguinte forma:

$$p_m^{(D)2} = \frac{\gamma m_0 c^2}{v_w^2} E_m^{(D)} , \quad (24)$$

onde  $m_0$  é a massa de repouso e  $\gamma = (1 - v_c^2/c^2)^{-1/2}$ .

Dessa forma, por tratar-se de uma onda de matéria, convenientemente substituímos  $c^2$  pelo produto  $v_w v_c$  ( $c^2 = v_w v_c$ ) e também  $p_m^{(D)}$  e  $E_m^{(D)}$  pelos operadores  $[p_r^{(D)}] = -i\hbar\nabla$  e  $[E_r^{(D)}] = i\hbar\partial/\partial t$ , respectivamente, que, em ato contínuo, atuam sobre o campo de ondas  $\psi_m(x, y, z; t)$ , que representa a partícula\*. O resultado dessas operações fornece:

$$-\hbar^2\nabla^2\psi_m(x, y, z; t) = \left(\frac{\gamma m_0 v_c}{v_w}\right) i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_m(x, y, z; t) , \quad (25)$$

Finalmente, se estamos interessado em sua evolução no regime não-relativista, para o qual  $v_c \ll c$ , então teremos:  $\gamma \approx 1$  e  $v_c = 2v_w$ , cujas substituições na expressão anterior leva à semelhança com a equação de Schrödinger da partícula livre [13], ou seja:

$$\frac{-\hbar}{2m_0}\nabla^2\psi_m(x, y, z; t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi_m(x, y, z; t) , \quad (26)$$

### 3.4. Equação de onda da partícula\* de matéria no regime relativista (1º caso)

Para o padrão (20), usando a relação  $v_w v_c = c^2$  e desde que

$$v_c = c\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} , \quad (27)$$

encontramos:

$$p_m^{(D)2} c^2 + m_0^2 c^4 = E_m^{(D)2} . \quad (28)$$

Essa é a equação da energia total relativística da partícula\* de matéria que pode ser representada eventualmente por uma onda, se admitirmos que o campo de ondas  $\psi_m(x, y, z; t)$ , representa a partícula\*. Nesse caso substituindo  $p_m^{(D)}$  e  $E_m^{(D)}$  pelos operadores  $[p_m^{(D)}] = -i\hbar\nabla$  e  $[E_m^{(D)}] = i\hbar\partial/\partial t$ , e, em seguida, aplicando em  $\psi_m(x, y, z; t)$  encontramos :

$$\left[\nabla^2 - \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right]\psi_m(x, y, z; t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_m(x, y, z; t)}{\partial t^2} . \quad (29)$$

Essa expressão é semelhante à equação de Klein-Gordon [24], para  $\psi_m(x, y, z; t)$  definido como um campo escalar.

### 3.5. Equação de onda da partícula\* de matéria no regime relativístico (2º caso)

Novamente, para uma partícula\* de matéria em condições relativísticas, usando  $c^2 = v_w v_c$  e a relação (27), o padrão (20) pode assumir os seguintes aspectos:

$$E_m^{(D)} = \left( \frac{\gamma}{\gamma + 1} \right) p_m^{(D)} v_c + E_0 \quad , \quad (30)$$

ou,

$$p_m^{(D)} c = E_m^{(D)} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/2} \quad , \quad (31)$$

Tais expressões facilmente podem ser colocadas na forma de operadores:

$$\alpha c [p_m^{(D)}] + \beta E_0 = [E_m^{(D)}] \quad , \quad (32)$$

onde:  $\alpha = v_c/c$  e  $\beta = 1/\gamma = [1 - (v_c/c)^2]^{1/2}$ ;  $E_0$ , é a energia de repouso da partícula\*; e  $[p_m^{(D)}] = -i\hbar\nabla$  e  $[E_m^{(D)}] = i\hbar\partial/\partial t$ , são operadores que quando aplicados ao campo de ondas  $\psi_m(x, y, z; t)$ , que representa a partícula\*, resultam na expressão:

$$(-i\hbar\alpha\nabla + \beta E_0)\psi_m(x, y, z; t) = i\hbar \frac{\partial\psi_m(x, y, z; t)}{\partial t} \quad . \quad (33)$$

Essa expressão é semelhante à equação de onda relativística de Dirac [25] para o elétron, que é uma partícula\* de spin  $\hbar/2$ , desde que  $\psi_m(x, y, z; t)$  seja tratado como um campo spinorial, um campo de ondas cujas componentes podem ser representadas por matrizes.

### 3.6. Equação de onda de uma partícula\* de radiação

Uma partícula\* de radiação, cuja matéria está “oculta”, tem seu movimento regulado pelo padrão (21) que pode fornecer outros resultados quando usamos a relação (27). Ele pode ser escrito na forma

$$p_r^{(D)} \frac{c^2}{v_w^2} + m_0^2 c^2 = \frac{E_r^{(D)2}}{c^2} \quad . \quad (34)$$

Mas, para esse tipo de partícula\* a velocidade da onda de matéria ( $v_w$ ) é igual a velocidade da onda da radiação,  $c$ . Então, quando substituímos  $p_r^{(D)}$  e  $E_r^{(D)}$  pelos operadores  $[p_m^{(D)}] = -i\hbar\nabla$  e  $[E_m^{(D)}] = i\hbar\partial/\partial t$  atuando sobre um campo de radiação  $\psi_r(x, y, z; t)$ , obtemos:

$$\left[ \nabla^2 - \left( \frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right] \psi_r(x, y, z; t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_r(x, y, z; t)}{\partial t^2} \quad . \quad (35)$$

ou,

$$(\nabla^2 - \xi)\psi_r(x, y, z; t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_r(x, y, z; t)}{\partial t^2} \quad , \quad (36)$$



onde  $\xi = m_0^2 c^2 / \hbar^2$ .

Essa última expressão é semelhante à equação de Proca [26] e é oportuno e interessante destacar dois aspectos importantes desse resultado.

Primeiro, quando escrevemos a equação (34) em termos do corpúsculo “oculto” na partícula\*, podemos expressá-la na forma:

$$p_r^{(D)2} \frac{v_c^2}{c^2} + m_0^2 c^2 = \frac{E_r^{(D)2}}{c^2} \quad . \quad (37)$$

O que se verifica é que mesmo em repouso, quando  $v_c = 0$ , a partícula\* apresenta o momentum [20]:  $p_0 = m_0 c$ , e isto, em termos de onda representa o comprimento:  $\lambda_0 = h/m_0 c$ , ou seja, a partícula\* de radiação com matéria “oculta” e inerte possui um comprimento igual a  $\lambda_0/2\pi = \lambda_c$ , onde  $\lambda_c = \hbar/m_0 c$  é o comprimento de onda Compton do fóton, de acordo com Proca.

Segundo, a equação (35) é semelhante à equação de Klein-Gordon, em forma, porque ambas foram obtidas considerando uma partícula\* com massa de repouso no regime relativístico, porém são completamente diferentes quanto à natureza da partícula\* e do campo que a representa.

#### 4. Sobre o princípio da complementaridade

Em análise o comportamento do elétron e do fóton em face de duas interações: uma colisão e a experiência de dupla fenda [27].

Nessas interações o elétron é denotado por P1 – uma partícula\* de matéria com a radiação “oculta” (o fóton); e o fóton é denotado por P2 – uma partícula\* de radiação com a matéria “oculta” (o elétron). Consideramos, ainda, que a colisão é uma interação de prevalência corpuscular enquanto que a experiência de dupla fenda é uma interação de prevalência ondulatória, de modo a estarmos de frente a duas realidades, R<sub>1</sub> e R<sub>2</sub>, assim estabelecidas:

R<sub>1</sub>: Na colisão de P1 com o núcleo pesado de um átomo ocorre a frenagem de P1 seguida da “geração” de P2. Em processo inverso, na interação de P2 com esse mesmo núcleo, ocorre a frenagem de P2 seguida da “criação” de P1.

R<sub>2</sub>: As mesmas partículas\*, P1 e P2, são lançadas em momentos distintos contra um dispositivo de dupla fenda, com as fendas abertas, que revela tanto para uma quanto para outra, um resultado idêntico: a interferência.

Em R<sub>1</sub> não podemos imaginar a “geração” de radiação sem conceber P1, e nem a “criação” de matéria sem conceber P2, pois a frenagem e a “geração” ou “criação” dessas partículas\* são processos simultâneos. Essa realidade, portanto, assegura uma evidência experimental: em essência não podemos separar P1 da radiação e nem P2 da matéria, mas tão somente fazermos uma escolha sobre o que pretendemos analisar.

P1 e P2 são partículas distintas, pertencem a grupos de diferentes partículas\*, mas assemelham-se quanto ao duplo comportamento por causa de suas essências. Esta é a razão pela qual, em R<sub>2</sub>, ambas produzem independentemente a interferência, um fenômeno óptico que somente ocorre com as ondas.

Essa linha de raciocínio é perfeitamente compreensível e corrobora o aspecto dual como uma propriedade intrínseca, onde a natureza corpuscular advém da matéria e a natureza ondulatória, da radiação. Então há uma causa do duplo comportamento: a coexistência de matéria e radiação no interior da partícula\*.

Tal coexistência pode ser pensada como um fluxo causal, cujo efeito corpuscular ou ondulatório é exteriorizado da partícula\* por intermédio de uma interação.

Para se ter a plena cognição que essa assertiva significa, retomemos a experiência da dupla fenda, o clássico da Física que fora adotado pela teoria quântica para revelar o comportamento bizarro do elétron.

Ela é utilizada considerando haver um princípio de indeterminação [28] que tem relação com o processo de medida sobre o elétron que passa pelo dispositivo, pois antes era um corpúsculo e depois de passar pelas fendas abertas, interfere como ondas. Mas, a certeza do que efetivamente se trata ocorre somente após a observação (a medida realizada). Por esta razão muitas vezes se considera que o princípio também fixa o efeito da observação como algo que define o objeto quântico, como onda ou corpúsculo. Esta idéia é bastante difundida.

Mas, fundamentalmente ele foi interpretado como a impossibilidade de medidas simultâneas de dois observáveis quânticos descritos por operadores não comutativos, relativos à dinâmica de uma partícula. A falta da simultaneidade se dá pelo valor da ação de Planck –  $h$  ser diferente de zero, e que, em geral, o ato de medir um desses observáveis, destrói completamente a informação prévia contida e disponível no outro.

Essa explicação e todas as que se baseiam neste princípio provavelmente foram o “caminho” que Bohr se utilizara a fim de subsidiar sua tentativa de justificar, de maneira heurística, uma nova argumentação que imaginara ser a resposta para as contradições estabelecidas pelo duplo comportamento das partículas e os processos de medida. Tal argumentação é conhecida como princípio da complementaridade [29], cujo teor se depreende:

*“Uma partícula em determinadas circunstâncias experimentais exhibe propriedades de onda e, em outras circunstâncias, exhibe propriedades de corpúsculo, mas nunca exhibe ambas as propriedades simultaneamente.”*

Todavia, não se identifica neste princípio a ação direta de se observar a partícula\* e que esta ação seja capaz de alterar seu duplo comportamento (pelo simples fato da observação), ainda que a imaginemos como uma partícula ordinária. São as circunstâncias experimentais, as interações de determinada prevalência, que estabelecem a maneira como a partícula\* irá revelar-se. Em outras palavras, uma vez preparada à circunstância experimental, o observador pode perfeitamente se ausentar, porque o resultado da experiência será aquele ao qual a partícula\* terá sua prevalência provocada, univocamente, como onda ou corpúsculo.

Isso significa que na experiência de dupla fenda, se a abertura das fendas tem dimensão do comprimento de onda da partícula\*, quando esta é lançada contra o aparato sempre ocorrerá a interferência, exibida em um anteparo, quando ela passar pelas fendas abertas, independente do observador, porque o dispositivo preparado fixa a interação de prevalência ondulatória, e então a partícula\* revela propriedades dessa natureza [18].

A única maneira de mudar a configuração da partícula\* é o observador submetê-la a uma interação de prevalência corpuscular, próximo a quaisquer das fendas, (para que não haja dúvidas por onde ela passou) no percurso entre a fenda escolhida e o anteparo. Quando assim o fizer, a nova interação “induzirá” à partícula\* a convergência sobre si própria de toda e qualquer informação ondulatória antes exteriorizada. E, isso não depende do observador, podendo novamente se ausentar porque o que se verificará no anteparo depende tão somente da partícula em face da interação.

O mesmo ocorre para uma das fendas fechadas, a partícula\* ao passar pela fenda aberta continuará a exibir seu comportamento ondulatório, registrado no anteparo, mas não mais de interferência e sim de difração. A configuração de onda para corpúsculo só mudará se o observador colocar novamente um dispositivo de prevalência corpuscular entre a fenda aberta e o anteparo, então o resultado da interação da partícula\* com esse dispositivo ficará definido e registrado no anteparo, independente do observador.

A complementaridade, portanto, deve contemplar a essência da partícula\*, cujas propriedades são reveladas como efeitos nas circunstâncias experimentais a que eventualmente poderão estar sujeitas. Nesse sentido o princípio da complementaridade é enunciado como segue:

*“Devido à essência da partícula\* ela possui propriedades complementares que se verificam como efeitos em determinadas circunstâncias experimentais. Para experimentos com prevalência ondulatória ela exibirá suas propriedades de onda; para experimentos com prevalência corpuscular, ela exibirá suas propriedades de corpúsculo, e isso é unívoco, ou seja, ela nunca exibirá ambas as propriedades em uma mesma circunstância experimental”.*

## 5. Conclusão

A concepção de um novo conceito de partícula\* e a construção apropriada de um modelo matemático baseado na relatividade especial e na mecânica ondulatória permitiram obter uma série de resultados que foram destacados em dois artigos de Moraes, em 2017, relativos a cinemática e a dinâmica de uma partícula\* do programa *“sobre a relatividade especial em face do comportamento dual das partículas”*.

Na parte cinemática destacam-se transformações matemáticas cujas aplicações resultaram na determinação: do efeito Doppler do som; do efeito Doppler da luz (longitudinal e transversal); do coeficiente de Fresnel de arrastamento do “éter”; e na discussão cinemática sobre a experiência de dupla fenda [18].

Na parte dinâmica, a análise recaiu sobre a energia e o momentum da partícula\* que foram utilizados para a determinação do (a): efeito fotoelétrico; momento angular do elétron; momento angular do fóton; efeito Compton; comprimento de onda do elétron; princípio da incerteza; produção e aniquilação de pares [19].

No presente trabalho, destaca-se a obtenção de equações de onda semelhantes às equações de: D’Alembert, Maxwell; Schrödinger; Klein-Gordon; Dirac; Proca, a partir de uma única equação geral. É notável uma única expressão matemática possibilitar essa gama de resultados que foram obtidos sem uma aparente conexão entre eles.

Por último, é oportuno destacar também as argumentações aqui expostas sobre a possível extensão do princípio da complementaridade de Bohr, considerando a importância que se deve dar à relação de causa e efeito no que tange ao duplo comportamento das partículas\* como algo imprescindível para todas as questões filosóficas e epistemológicas que cercam o assunto.

Tal reflexão que o autor propõe pode ser adicionada ao excelente texto de Freire [30] que dispõe sobre as interpretações epistemológicas e físicas da teoria quântica, que cobriu o período entre 1927 e 1949, do qual destacamos alguns trechos sobre os pensamentos de Fock e Langevin.

De acordo com Freire Jr., as duas contribuições epistemológicas fundamentais de Fock são o conceito de relatividade com referência aos meios de observação e sua análise de probabilidade na função de onda. Fixemo-nos na primeira.

Para analisar o problema da interação entre o objeto e aparelho de medida Fock relembra que *“as propriedades dos objetos manifestam-se sempre em interação com outros objetos, particularmente com os meios de observação (instrumentos de medida). Isto vale tanto na física clássica quanto na física quântica”*.

Esta abstração dos meios de observação, possível na física clássica e mais a possibilidade também clássica de se obterem resultados experimentais cada vez mais precisos, sem nenhuma restrição a priori, conformam o que Fock denominaria posteriormente de *“Método Clássico da Descrição dos Fenômenos”* (Freire [30], p. 59).

Para Fock a inovação da teoria quântica está em que *“não somente precisão no sentido quantitativo, mas também formulação de propriedades qualitativamente novas dos micro-objetos requer novos métodos de descrição, e acima de tudo um novo elemento de relatividade – relatividade em relação aos meios de observação deve ser introduzido”* (Freire [30], p. 60).

Em outra análise Freire comenta Langevin.

Sobre as questões levantadas por Einstein relativas ao indeterminismo e a polêmica com Bohr relativa à recente elaboração da teoria quântica e o seu significado, que foram discutidas no Congresso de Solvay, em 1927, Langevin apercebe-se da profundidade do assunto, mas diferentemente de Einstein que tentou mostrar que a teoria quântica era incompleta, no sentido proposto por Bohr, ele vislumbra, dois anos depois, outra possibilidade: *“Não é o determinismo que está em crise, mas o mecanicismo”* (Freire [30], p. 74).

Na conferência *“A noção de corpúsculos e átomos”*, em 1933, Langevin sustenta que a física quântica revelou a inadequação da estrutura de representação real própria da mecânica clássica, bem como da forma de determinismo laplaciano. Ele concentra sua crítica especialmente na noção de corpúsculo e na inadequação de estender este conceito à teoria quântica. Sua crítica ao determinismo mecanicista tem também um sentido filosófico mais geral, considerando-o uma forma de fatalismo e por isso mesmo estranho à natureza da ciência. Rejeita a tese de que a teoria quântica elimina o determinismo, mostrando que o próprio *“princípio de indeterminação”* é determinado pela constante de Planck. E faz a defesa da descrição probabilística como uma forma mais desenvolvida do determinismo.

Mais duas questões destacam-se nesta conferência: sua crítica contundente à pretensa *“falência do determinismo”*. Sua crítica dirige-se nominalmente para Dirac e Eddington. A segunda é que para Langevin, como vimos, não se trata de recuperar o determinismo clássico, mas sim de superar o mecanicismo usado para a representação de novos domínios. Considera insuficiente a solução apresentada por Bohr na forma de um *“princípio de complementaridade”* afirmando que este se instala na contradição ao invés de buscar sua superação. O programa apresentado por Langevin é o da mudança do conceito de corpúsculo individualizável. E usa como argumento a favor deste programa as novas estatísticas quânticas que com o novo conceito de partículas indistinguíveis estariam a exigir a mudança deste conceito de corpúsculo individualizável (Freire [30], p. 75).

... Contudo Bohr, em 1938, não concorda com a crítica ao conceito de corpúsculo individualizável, considera que existem corpúsculos quânticos como o fóton e corpúsculos clássicos como o elétron. O programa da eliminação do conceito de corpúsculo individualizável não foi levado adiante. Langevin morreria logo após a Segunda Guerra (Freire [30], p. 77).

É curiosa a negativa de Bohr considerando a descoberta do spin do elétron, em 1925, por Uhlenbeck e Goudsmit [31]. O spin é uma propriedade exclusivamente quântica, fato que era de seu conhecimento antes das discussões filosóficas e epistemológicas, da qual participara em algumas conferências, sobre o comportamento das partículas, desde 1927.

Por fim, é importante enfatizar que todas as expressões matemáticas obtidas neste trabalho, e nos dois artigos anteriores de Moraes [18, 19], valem para qualquer partícula\* de radiação e matéria, e se bem pensarmos no conceito é possível extrapolá-lo para o que se postula “matéria escura”, pois assim como a radiação está inserida em todas as regiões do espectro eletromagnético, e sua maior faixa de frequência encontra-se na região invisível, talvez essa “matéria escura”, que constitui cerca de 95% da matéria do universo, esteja “oculta” em alguma espécie de radiação (ou campo de radiação) que só interage gravitacionalmente.

De todo modo não devemos perder de vista que sempre haverá discussões sobre interpretações de teorias, em qualquer área do conhecimento humano e em qualquer tempo. E isto é perfeitamente natural. Por outro lado, devemos ter a sensatez de não repudiar aquilo que para nós também é desconhecido. Devemos, sim, nos concentrar naquilo que é possível, no que é aparentemente mais simples, e contribuir para que cada vez mais existam menos obscuridades na ciência.

## Agradecimentos

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará pelo apoio irrestrito para a publicação deste trabalho. Ressalta-se que este artigo é uma parte do programa de pesquisa “*sobre a relatividade especial em face do comportamento dual das partículas*” e que uma versão em inglês, com algumas modificações, está sendo produzida para ser submetida à análise em revista internacional.

## Referências

- [1] Mach, E., *The Science of Mechanics: a critical and historical account of its development*. The Open Court Publishing Company (1960).
- [2] Einstein, A., *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Annalen der Physik, Series 4, Vol. 17: p. 891-921 (1905).
- [3] Wien, W., *Über die Energievertheilung im Emissionsspektrum eines schwarzen Körpers*. Wiedmannsche Annalen der Physik 58, p. 662-669 (1896).
- [4] Rayleigh, J. W. S., *Remarks upon the law of a complete radiation*. Philosophical Magazine, 49, p. 539-540 (1900).
- [5] Planck, M., *Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum*. Annalen der Physik, Series 4, Vol. 309, Issue 3: p. 553-563 (1901).
- [6] Boltzmann, L., *Proceedings of the Imperial Academy of Science*. Viena (II) 76, p. 428 (1877).

- [7] Pais, A. “*Subtle is the Lord...*”: *The science and the life of Albert Einstein*. Oxford University Press (1982).
- [8] Einstein, A., *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*. *Annalen der Physik*, **322** (6): p. 132–148 (1905).
- [9] Compton, A. H., *A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements*. *Physical Review*, **21**, N° 5: p. 483-502 (1923)
- [10] Thomson, J. J., *Cathode Ray*. *Philosophical Magazine*, S. 5, **44**, p. 293-316 (1897).
- [11] Davisson, C.; Germer, L. H., *Reflection of Electrons by a Crystal of Nickel*. *Nature* **119**: p. 558-560 (1927).
- [12] De Broglie, L., *Ondes et Quanta*. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, **177**: p. 507-510 (1923).
- [13] Schrodinger, E., *Quantisierung als Eigenwertproblem*”, *Annalen der Physik*, Ser 4, **79**, p.361-376 (1926).
- [14] Bassalo, J. M. F., *Crônicas da Física*, Tomo 3. Editora UFPA, p. 982 (1992).
- [15] Heisenberg, W., *The Principles of the Quantum Theory*, University of Chicago Press (1930).
- [16] Dirac, P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, 4<sup>a</sup> Edition, Clarendon Press (1953).
- [17] Bassalo, J. M. F., *Crônicas da Física*, Tomo 2, Editora UFPA, p. 675-676 (1990).
- [18] Moraes, B. T. F, *Sobre a relatividade especial em face ao comportamento dual das partículas (Primeira Parte – Análise Cinemática)* Proc. 23051.032627/2017-86, Publicações IFPA, <http://belem.ifpa.edu.br>, Belém, Pará, Brazil (2017).
- [19] Moraes, B. T. F, *Sobre a relatividade especial em face ao comportamento dual das partículas (Segunda Parte: energia e momentum)* Proc. 23051.034732/2017-50, Publicações IFPA, <http://belem.ifpa.edu.br>, Belém, Pará, Brazil (2017).
- [20] Moraes, B. T. F, *Trabalho Suplementar da Tese de Professor Titular*, Proc. 23051.020089/2016-04, Publicações IFPA, <http://belem.ifpa.edu.br>, Belém, Pará, Brazil (2016).
- [21] Lorentz, H. A., *Proceedings of the Academy of Sciences of Amsterdam* **6**, p. 809-831 (1904).
- [22] Martins, J. B., *Mecânica Racional: de Newton à mecânica clássica*. Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, Brazil, p. 63 (2010).
- [23] Maxwell, J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. **1-2**, New York, Dover (1972).
- [24] Greiner, W., *Relativistic Quantum Mechanics: wave equations*. Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1997).
- [25] Dirac, P. A. M., *The Quantum Theory of the Electron*. *Proceedings of the Royal Society of London* **A117**, p. 610-624 (1928).
- [26] Gonçalves, E. S., *A Massa do Fóton e a Eletrodinâmica de Proca*. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista, São Paulo (2008).
- [27] Young, T., *Experiments and calculations relative to physical optics (1803 Bakerian Lecture)*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **94**, p. 1-16 (1804).
- [28] Heisenberg, W., *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*. *Zeitschrift für Physik*, **43**, p. 172-198 (1927).

- [29] Bohr, N., *The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory*. *Nature*, **121**: p. 580–590 (1934).
- [30] Freire Jr., O., *Estudo sobre interpretações (1927-1949) da teoria quântica: epistemologia e física*. Dissertação de mestrado, USP, São Paulo (1990).
- [31] Uhlenbeck, G. E.; Goudsmit, S., *Ersetzung der Hypothese von unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Electrons*. *Die Naturwissenschaften* **13**, p. 953-954.